Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Girish Kulkarni

Sommersemester 2022
09.06.2022

Lineare Algebra II
Blatt 9

---

1 | Rekursion

Berechnen Sie das Folgeglied s_{1000} in der folgendermaßen definierten Folge ganzer Zahlen:

$$\begin{aligned} s_1 &= -1 \\ s_2 &= 1 \\ s_3 &= 2 \\ s_{3+k} &= 2s_k + 3s_{1+k} \qquad \text{für } k \geqslant 1 \end{aligned}$$

2 | Analysis

Bestimmen Sie zu den Anfangswerten $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, $z_0 = 1$ eine explizite Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= x + y \\ \dot{z} &= x - y + 2z \end{aligned}$$

3 | Einfältig

Sei K ein beliebiger Körper. Zeigen Sie, dass die einzige diagonalisierbare $(n \times n)$-Matrix über K mit genau einem Eigenwert $a \in K$ die Diagonalmatrix $a \cdot \mathbb{1}_n$ ist.

4 | Abkürzung

Zeigen Sie, dass die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (a - X)^n$ für ein $a \in \mathbb{C}$ von der Form

$$A = a \cdot \mathbb{1}_n + N$$

ist, für eine nilpotente Matrix N. Offenbar lässt sich N direkt aus A und a berechnen. Nutzen Sie dies aus, um für die folgenden beiden Matrizen A^{100}, B^{100}, $\exp(A)$ und $\exp(B)$ zu berechnen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Abgabefrist: 20.06.2022, 10:15 Uhr.